كلية التجارة
قسم الرياضة والتأمين والإحصاء

جامعة مدينة السادات

تسعير وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري
بإستخدام أسلوب التحليل البيزي

الأستاذ/ علاء فرج مسعود العربي
المدرس المساعد بقسم الرياضة والتأمين والإحصاء
كلية التجارة – جامعة مدينة السادات

الأستاذ الدكتور/ أسامة ربيع أمين سليمان
أستاذ ورئيس قسم الرياضة والتأمين والإحصاء
كلية التجارة – جامعة مدينة السادات

٢٠٢١

ملخص الدراسة:

هدفت الدراسة الي تسعير وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري وذلك باستخدام أسلوب التحليل البيزي للبيانات، عن تقدير كل من التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات ، والتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات ، ثم تقدير التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لقيم المطالبات. وقد اعتمدت الدراسة على استخدام منحنيات بيرسون في تحديد دالة التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لقيم المطالبات عن طريق العزوم المركزية والناتجة من دمج عزوم التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات، وعزوم التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات، وتم التوصل الي أن التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لقيم مطالبات تأمين آلات ومعدات المقاولين يتبع توزيع جاما. وقد أوصت الدراسة بضرورة استخدام أسلوب التحليل البيزي والتوزيعات الاحتمالية المركبة في تسعير وثيقة آلات ومعدات المقاولين، بالإضافة الي استخدام منحنيات بيرسون كوسيلة لتحديد التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لقيم مطالبات تأمين آلات ومعدات المقاولين.

Abstract:

The study aimed at pricing contractors Plant and Machinery Policy (CPM) in the Egyptian insurance market, using the Bayesian approach for data analysis, By estimating both the predictive probability distribution of the number of claims, and the predictive probability distribution of the claims size, then estimating the predictive aggregate distribution of the claims values. The study relied on the use of Pearson distributions in estimating the function of the predictive aggregate distribution of the claims values through the central moments resulting from the combination of the moments of the predictive probability distribution of claim frequency, and the moments of the predictive probability distribution of the claim size, and it was concluded that the predictive aggregate distribution of the claims values for engineering risks of contractors Plant and Machinery policy follows gamma distribution. The study recommended the need to use the Bayesian approach for data analysis and compound probability distributions in pricing contractors Plant and Machinery Policy, in addition to use Pearson distributions as a mean of determining the predictive aggregate distribution of the claims values for engineering risks of contractors Plant and Machinery policy.

مقدمة

يعد التأمين الهندسي أحد فروع التأمينات العامة الذي يغطي الخسائر المادية التي تتعرض لها الآلات والمعدات والأجهزة والتركيبات والأعمال المدنية والمهمات الخاصة بالمشروعات الهندسية ، خلال فترات التشييد أو التركيب ، أو إجراء التجارب ، وحتي بدء التشغيل الفعلي، كما يمكن شمول التغطية للمسئولية المدنية التي يتعرض لها مقاول التشييد أو مقاول التركيب خلال فترة التأمين بشرط أن تقع في موقع العمل أو بجواره وبسبب الأعمال المؤمن عليها ، كما يتضمن هذا الفرع التغطية التأمينية للخسائر المادية التي قد تتعرض لها المعدات خلال فترة التشغيل الفعلي.

تعد وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين أحد أهم وثائق التأمين الهندسي في سوق التأمين المصري حيث تهدف هذه الوثيقة إلي توفير خدمة الحماية التأمينية، لتغطية كافة أنواع المعدات والماكينات، التي يستخدمها المؤمن له(مقاولو أعمال البناء والتشييد، سواء كانوا يملكون المعدات أو الماكينات أو يستأجرونها) في أغراض البناء والتشييد مثل الأوناش ، آلات تسوية الأرض، الآلات والمعدات الزراعية، بسبب حادث فجائي، لأي سبب، بخلاف تلك الأسباب المستثناة في الوثيقة؛ وذلك أثناء وجود تلك الآلات أو المعدات المؤمن عليها، والوارد ذكرها في جدول الوثيقة ، في موقع العمل أو أثناء التشغيل أو التوقف أو أثناء فكها بغرض تنظيفها أو تشحيمها أو صيانتها أو أثناء إعادة تركيبها.

وتغطي هذه الوثيقة آلات ومعدات المقاولين البرية من الأضرار التي تلحق بها بسبب حادث عرضي مفاجئ، لأي سبب بخلاف تلك الأسباب المستثناة بالوثيقة وذلك أثناء تواجدها بالموقع. ومن أهم الأخطار التي تغطيها هذه الوثيقة ما يلي: أخطار السرقة، خيانة الأمانة، الأذى المتعمد وأخطار الحريق والانفجار.

وسوف يقوم الباحث بتسعير وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري باستخدام أسلوب التحليل البيزي، للوصول الي سياسة تسعير فعالة يمكن الاعتماد عليها لتحقيق التنمية الاقتصادية وبما يتلاءم مع الظروف المعاصرة.

أولاً: مشكلة الدراسة

تتمثل مشكلة الدراسة في أن وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين تعتبر من فئة وثائق جميع الأخطار والتي تقدم تغطية تأمينية لأي خسارة مادية غير متوقعة تحدث للآلات والماكينات بسعر موحد، ، وهو ما لا يتوافر في وثائق تأمينات الممتلكات، حيث يقتصر دورها على تغطية موضوع معين ضد أخطار بعينها. وبالتالي فإن وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين تقدم حماية كاملة وشاملة لوحدات الخطر وذلك أثناء وجود تلك الآلات أو المعدات المؤمن عليها، في موقع العمل أو أثناء التشغيل أو التوقف أو أثناء فكها بغرض تنظيفها أو تشحيمها أو صيانتها أو أثناء إعادة تركيبها ،لذلك أصبحت عملية تسعير وثائق جميع الأخطار من أهم المشاكل التي تواجه شركات التأمين .

ومما سبق تتضح المشكلة في عدم ملائمة الأسعار السائدة للأخطار التي تغطيها وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين ، وبالتالي كان من الضروري البحث عن الأساليب العلمية والكمية للوصول الي النموذج الكمي المستنتج من خبرة شركات التأمين والذي سيستخدم في التسعير.

ثانياً: أهداف الدراسة:

يتمثل الهدف الأساسي في التوصل الي سعر تأمين عادل لوثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري بطريقة تتناسب مع درجة الخطورة وبما لا يخل بأسعار التغطيات الأخرى، وذلك باستخدام أسلوب التحليل البيزي، من خلال تحديد كل من ; التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات، والتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات بالإضافة الي تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي لإجمالي قيم المطالبات.

ثالثاً: أهمية الدراسة:

تنبع أهمية الدراسة من حاجة السوق المصري الي تعريفة سعرية تعكس الخبرة المحلية لتجنب المنافسة الضارة بين شركات التأمين وتحقيق أسعار عادلة لكلا من شركات التأمين والمؤمن لهم. كما ان التسعير الدقيق لوثائق التأمين الهندسي يؤدي الي زيادة حجم عمليات شركات التأمين وبالتالي زيادة حجم الأقساط المحتفظ بها، مما يؤدي الي ضمان إستمرارية السيولة النقدية في الشركة لمواجهة أية التزمات مستقبلية.

ويؤدي إتباع شركات التأمين لسياسة تسعير عادلة الي زيادة ثقة المؤمن لهم وشعورهم بالعدالة والأمان، وبالتالي ضمان شراء وثائق التأمين الهندسي مما يؤثر إيجابياً في الاقتصاد القومي ودفع عجلة التنمية الاقتصادية ، هذا بالإضافة الي حماية الثروة القومية تستثمر في البناء والتشييد.

رابعاً: حدود الدراسة:

- تقتصر الدراسة التطبيقية على الأخطار التي تغطيها وثيقة تأمين اَلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري.
- تقتصر الحدود الزمنية على الفترة من ٢٠١٣ الي ٢٠٢٠

خامساً: الدراسات السابقة:

استهدفت **دراسة (فياض،٢٠١٩)** تسعير تأمين أخطار التركيب لمحطات توليد القوي الكهربائية في مرحلة الإنشاء. وقامت الدراسة بعمل التحليل العاملي للعوامل المؤثرة في الخطر لتحديد أفضل الوسائل لإدارة تلك الأخطار، وصولاً لاقتراح نموذج كمي لتسعير هذه الأخطار بواسطة شركات التأمين في السوق المصري.كما استهدفت **دراسة (المعداوي، ٢٠١٨)** تسعير التأمين الهندسي باستخدام نموذج المصداقية الثاني ، وأوصت الدراسة باستخدام النموذج المقترح في تسعير التأمين الهندسي، ومقارنته بالأساليب العلمية والإكتوارية المستخدمة في التسعير من أجل الوصول الي أنسب أسلوب يمكن استخدامه في التسعير وذلك تحقيقاً للعدالة في حساب القسط والحد من تسرب العملات الأجنبية للخارج. كما استهدفت **دراسة (غالي، ٢٠١٧)** تقديم مشروع تغطية تأمينية مقترحة للمعدات والماكينات الخاصة بالتأمينات الهندسية، وتوصلت الدارسة إلى وجود تأثير معنوي لعمر المعدة أو الماكينة والنوع ومبلغ التأمين على الخسائر الخاصة لوثيقتي تأمين الات ومعدات المقاولين وتأمين عطل الماكينات. واستهدفت **دراسة (عبد الله، ٢٠١٥)** تقييم سياسات الاكتتاب الحالية المطبقة بفرع التأمين الهندسي بسوق التأمين المصري. واعتمدت الدراسة على استخدام بعض المؤشرات الفنية التي تهتم بقياس نتائج النشاط الاكتتابي بفروع تأمينات الممتلكات والمسئولية بهدف تقييم النشاط الاكتتابي للفرع محل الدراسة. توصلت الدراسة لمجموعة من النتائج تشير الي وجود ضعف بالسياسات الاكتتابية لشركات التأمين العاملة في السوق المصري عند قبول الاكتتاب في الأخطار الهندسية. بينما استهدفت **دراسة (Sigurgeirsdóttir,2010)** إستخدام النماذج الإحتمالية وأسلوب التحليل البيزي في تسعير التأمين على السيارات من خلال تقدير اجمالي قيم المطالبات المتوقعة بسبب حوادث السيارات اعتمادا على نماذج الخطر التجميعية. في حين استهدفت **دراسة (غالي، ٢٠٠٨)** تسعير وثيقة جميع أخطار التركيب وإيجاد التوزيع الاحتمالي لكل من معدل تحقق الخطر، وحجم الخسارة الناتجة عنه لكل خطر، وأظهرت نتائج الدراسة أن تقييم وتحليل الخطر عنصراً أساسياً من عناصر تحديد قيمة القسط وذلك للوصول الي القسط المناسب للاكتتاب. واستهدفت **دراسة (حسان، ٢٠٠٢)** تقديم نموذج كمي لتسعير الأخطار الهندسية يعتمد علي استخدم أسلوب التحليل العاملي للعوامل المؤثرة في درجة الخطر، وتوصلت الدراسة الي ضرورة لاستخدام أسلوب كمي في عملية التسعير، سوف يزيد من إصدارات الشركة في فرع التأمين الهندسي.

كما استهدفت دراسة **(David,Tedesco,Zehnwirth,1998)** استخدام نظرية بييز في تقدير التوزيعات الاحتمالية التنبؤية الاجمالية للمطالبات المتوقعة واستخدامها في تطبيقات التسعير في التأمين اعتماداً على نماذج الخطر التجميعية. أما **دراسة (معيط، ١٩٩٢)** فقد استهدفت الدراسة تسعير تأمين جميع أخطار المقاولين في السوق المصرية، ووضع تعريفة تطبق على هذا النوع من التأمين متأثرة بواقع الخبرة المصرية وظروف السوق المصرية الفعلية. وأوصت الدراسة بإدخال تعديل على الأسعار الواردة في تعريفة شركة ميونخ لإعادة التأمين طبقاً لنسبة التعديل التي تم استنتاجها في البحث وفقاً لخبرة السوق المصرية.

تحليل وتقييم الدراسات السابقة:

من خلال استقراء الدراسات السابقة يستخلص الباحث ما يلي:

- أوضحت الدراسات السابقة أن عملية تسعير التأمينات الهندسية تخضع لتعريفة محددة دون مراعاة للظروف البيئية للمشروعات الهندسية والمتغيرات التي تختلف من موقع الي آخر ومن عملية لأخري.
- أوصت الدراسات السابقة الي ضرورة قيام شركات التأمين المصرية باستخدام الأساليب الرياضية الحديثة في تسعير التأمين الهندسي ومحاولة وضع تعريفة إرشادية للتأمينات الهندسية تتفق مع خبرة السوق المصرية بدلاً من الاعتماد على التعريفة الواردة من شركات إعادة التأمين.
- لم تتناول الدراسات السابقة تسعير وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري.

سادساً: خطة الدراسة:

لتحقيق الهدف من البحث فسوف يتم تناوله من خلال المباحث التالية:

- المبحث الأول: أسلوب التحليل البيزي للبيانات.
- المبحث الثالث: النموذج الكمي المقترح للتسعيرباستخدام أسلوب التحليل البيزي للبيانات.

المبحث الأول

أسلوب التحليل البيزي للبيانات

سوف يتم استخدام أسلوب التحليل البيزي لتقدير إجمالي قيم المطالبات المتوقعة مستقبلاً في شركات التأمين المصرية محل الدراسة، وذلك للأسباب التالية: **(جلول، ٢٠١٣، ص. ١٧٠)**

أ- يحقق التحليل البيزي نتائج أكثر دقة في تقدير النسب المالية (الاعتماد في تقدير معالم التوزيع القبلي على البيانات الفعلية) عن تلك التي نحصل عليها من تطبيق الأساليب التقليدية (الاعتماد على التقدير الشخصي والتحيز)

ب- يأخذ في الاعتبار تغير قيم المعالم مع تراكم خبرة البيانات المتاحة عن المشكلة محل الدراسة بمرور الزمن.

ج- يعمل على تدنية الفرق بين قيمة المعلمة الأصلية وقيمتها المقدرة الي اقل ما يمكن، وذلك عن طريق وضع مجموعة متتابعة من القواعد الحاكمة للقرار.

د- يعتمد على الفروض الموضوعة والقواعد الحاكمة للعمليات الحسابية لكي تصل الي مقدرات المعالم أقرب ما يكون الي الحل الأمثل.

هـ -يتميز هذا الأسلوب عن الأساليب الأخرى في عدم تجاهله للمعالم التي تعبر عن متغير عشوائي .

تعتمد نظرية بيز في مفهومها على استخدام مصدرين من مصادر المعلومات، هما المعلومات القبلية (Prior Information) ومعلومات العينة الحالية، حيث إنها تستخدم معلومات قبلية حول معالم المجتمع غير المعلومة، معتبرة هذه المعالم متغيرات عشوائية يمكن وضعها بشكل توزيع احتمالي يسمي بالتوزيع القبلي (Prior Distribution) ، والذي يمثل تعبير عن المعرفة أو الجهل أحياناً حول المعلمات قبل الحصول على بيانات العينة. وهذه المعلومات تتوفر لدي الباحث من بيانات لتجارب سابقة أو من النظرية التي تحكم الظاهرة المدروسة. وبدمج التوزيع القبلي مع دالة الإمكان لبيانات العينة باستخدام أسلوب بيز يتم الحصول على التوزيع الاحتمالي البعدي (Posterior Distribution) للمعلمات، والذي يستخدم بدوره لبناء الاستدلال حول المعلمات. **(الدعيس ، ٢٠٠٩، ص. ٤٥)**

الطرق الإحصـــائية التقليدية تفترض أن المعلمات هي كميات ثابتة يتطلب تقديرها إما بتقدير نقطة أو فترة ثقة من خلال بيانات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع معين. وعليه فإن هذه المعلمات لا يمكن تمثيلها بتوزيع احتمالي أو اعتبارها على إنها متغير عشوائي له توزيع احتمالي معين. أما أســلوب التحليل البيزي فهي تقدم نهجاً بديلاً، إذ يتم التعامل مع المعلمات على أنها متغيرات عشوائية ولها توزيعات احتمالية، وبالتالي فإنه يمكن اجراء استدلال حول هذه المعلمات. **(Pacáková, V., 2012, p127)**

أولاً: خطوات التحليل البيزي للبيانات (عدد المطالبات ، قيم المطالبات)

سوف يتم استنتاج التوزيع الاحتمالي التنبؤي لكل من عدد المطالبات وقيم المطالبات ، ثم إيجاد التوزيع التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات Predictive Aggregate Distribution ، حيث يكون المتغير العشوائي لهذا التوزيع هو عبارة عن إجمالي قيم المطالبات.

الخطوات الاتية تصف العناصر الأساسية للتحليل البيزي للبيانات سواء كان لعدد المطالبات أو قيم هذه المطالبات: **(Strokes, 2014 p8)**

١- التوزيع الاحتمالي القبلي $\pi(\theta)$ prior Distribution

٢- التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi(\theta/\underline{X})$ posterior Distribution

٣- التوزيع الاحتمالي التنبؤي $f(X_{k+1}/\underline{x})$ posterior Distribution

١ - التوزيع الاحتمالي القبلي $\pi(\theta)$ Prior Distribution

أهم جزء في أسلوب التحليل البيزي هو التوزيع الاحتمالي القبلي. حيث إن التوزيع الاحتمالي القبلي $\pi(\theta)$ للمعلمة يمثل درجة اعتقاد الاحصائيين حول طبيعة المعلمة θ وذلك قبل تحليل البيانات محل الدراسة. أي أن التوزيع القبلي يعطينا كل المعلومات المتوفرة عن المعلمة θ وذلك قبل الحصول على العينة $\underline{X}$. وإن عملية ضرب التوزيع القبلي بدالة الإمكان يؤدي الي التوزيع البعدي للمعلمة، مما يسمح بإجراء الاستدلالات حول المعلمة، إذ لا يمكن إجراء أي استدلال بيزي دون استخدام التوزيع القبلي. **(Alba& Juarez,2002, p8)**

– ويمكن تقسيم التوزيعات الاحتمالية القبلية الي المعلمة والغير معلمة :

(Che, X., & S. Xu,2010, p577)

١/١ التوزيعات الاحتمالية القبلية المعلمة

(Informative Prior Distributions)

التوزيعات القبلية المعلمة هي توزيعات قبلية لها تأثير على التوزيع البعدي. فإذا كان التوزيع القبلي هو الذي يهيمن على دالة الإمكان، فهو توزيع قبلي معلم، وعليه يجب تحديد هذه الأنواع من التوزيعات بعناية في التطبيقات العملية. من ناحية أخري يوضح الاستخدام الصحيح للتوزيعات القبلية قوة أسلوب بيز.

إذا كان التوزيعات القبلية المعلمة بتتناسب مع دالة الإمكان ، وبالاعتماد علي توزيع العينة المأخوذ من المجتمع ، فيتم القول بأن التوزيع الاحتمالي القبلي مرافق للتوزيع الاحتمالي المسحوب منه العينة.

أ- التوزيعات القبلية المرافقة

(Conjugate Prior Distributions)

يقال أن التوزيع القبلي مرافق للتوزيع الاحتمالي المسحوب منه العينة إذا كان التوزيع البعدي ينتمي الي نفس العائلة التي ينتمي لها التوزيع القبلي مهما كانت المشاهدات وتسمي هذه الخاصية بخاصية الانغلاق تحت المعاينة.

التوزيع القبلي المرافق يبني علي دالة الإمكان الأعظم لتوزيع العينة وهو تلك التوزيع الذي يشابه دالة الإمكان الأعظم باعتبار المعلمة θ متغير عشوائي، وعند استخدام التوزيعات القبلية المرافقة فإن التوزيع البعدي يشابه التوزيع القبلي أي ينتمي الي نفس عائلة التوزيع القبلي.

٢/١ التوزيعات الاحتمالية القبلية الغير معلمة

(Noninformative Prior Distributions)

في حالة عدم توافر معلومات قبلية عن المعلمات، فانه يتطلب تحديد توزيع أولي وليكن $\pi(\theta)$ ، ويعرف على أنه غير معلوماتي إذا كان له تأثير محدود على التوزيع البعدي للمعلمة θ. أن التوزيعات القبلية غير المعلوماتية لا تعني الجهل التام عن المعلمة، وانما تعني أن المعرفة حول هذه المعلمات غامضة، وانه يتطلب التعبير عن هذا الغموض بتوزيع احتمالي مناسب. في بعض الحالات، يمكن أن تؤدي التوزيعات غير المعلوماتية القبلية غير الملائمة الي توزيعات بعدية غير ملائمة، مما يتطلب دمجها مع دالة الإمكان للحصول على توزيع احتمالي بعدي ملائم. توجد مجموعة من التوزيعات الاحتمالية القبلية غير المعلمة نذكر منها.

- ويمكن تقسيم التوزيعات الاحتمالية القبلية الغير معلمة الي تام أو غير تام.

(Ali,2010, p6)

أ- التوزيع القبلي التام

وفقا للتوزيع المنتظم إذا كانت المعلمة θ تأخذ مدي محدودا $(a < \theta < b)$ ، فإن التوزيع القبلي للمعلمة θ يكون على الشكل التالي:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad ; \; \alpha < \theta < \beta$$

ب- التوزيع القبلي غير التام أو الناقص

- وفقاً للتوزيع المنتظم إذا كانت المعلمة θ تأخذ مدي $(-\infty < \theta < \infty)$ فإن التوزيع الاحتمالي القبلي يتناسب مع $d\theta$.

$$\pi(\theta) \propto d\theta$$

- وإذا كانت المعلمة θ تأخذ مدي $(0 < \theta < \infty)$ فإن التوزيع الاحتمالي القبلي يتناسب مع $\frac{d\theta}{\theta}$ أي أن.

$$\pi(\theta) \propto \frac{d\theta}{\theta}$$

٢ ـ التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi(\theta/\underline{X})$

Posterior Distribution

يمكن الحصول التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi(\theta/\underline{X})$ من خلال دمج دالة التوزيع الاحتمالي القبلي $\pi(\theta)$ مع دالة الإمكان $f(\underline{X}/\theta)$ كما يلي: **(Pacáková, V., 2012, p128)**

يبني التوزيع البعدي في طريقة بييز علي المعلومات التي يحتويها توزيع العينة $(\underline{X} = x_1, x_2, \dots .x_n)$ بالإضافة الي المعلومات التي نعرفها حول المعلمة θ والتي يمثلها التوزيع القبلي $\pi(\theta)$ ويرمز للتوزيع الاحتمالي البعدي بالرمز $\pi(\theta/\underline{X})$.

التوزيع الاحتمالي البعدي هو توزيع احتمالي مشروط للمعلمة θ بشرط أخذ العينة ويحوي كل المعلومات التي يتحويها توزيع العينة $(\underline{X} = x_1, x_2, \dots .x_n)$ بالإضافة الي المعلومات الأخرى التي نعرفها حول المعلمة θ والتي يمثلها التوزيع القبلي $\pi(\theta)$ وهو يلخص كل المعلومات الممكنة حول المعلمة.

مما سبق وبفرض أن $(\underline{X} = x_1, x_2, \dots .x_n)$ عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمالية $f(\underline{X}/\theta)$ ، وأن θ متغيراً عشوائياً له توزيع إحتمالي قبلي $\pi(\theta)$ ، إذاً وفقاً لنظرية بيز بيتم الحصول على التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi(\theta/\underline{X})$ من خلال دمج دالة التوزيع الاحتمالي القبلي $\pi(\theta)$ مع دالة الإمكان للمشاهدات $f(\underline{X}/\theta)$.

المعلومات التي تم تجميعها من الخبرة السابقة عن المعلمة θ ، نلاحظ أنها تأخذ قيماً مختلفة، مما يجعل θ متغيراً عشوائياً له توزيع إحتمالي $\pi(\theta)$ ، ويسمي بالتوزيع الإحتمالي القبلي، وهذا التوزيع يصف المعلومات السابقة والمتوفرة حول المعلمة θ .

وأن دالة الإمكان الخاصة بمشاهدات العينة هي $f(\underline{X}/\theta) = \prod_{i=1}^{k} f(\underline{x}_i/\theta)$ وهي تلخص كافة المعلومات الممكن الحصول عليها من العينة. ومن خلال دمج دالة التوزيع الاحتمالي القبلي مع دالة الإمكان للمشاهدات يتم الحصول على دالة التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi(\theta/\underline{X})$. **(Pacáková, V., 2013, p333)**

- يمكن كتابة التوزيع الاحتمالي البعدي كما يلي:

$$\pi(\theta/\underline{X}) \propto f(\underline{X}/\theta)\ \pi(\theta)$$

٣ ـ التوزيع الاحتمالي التنبؤي $f(X_{k+1}/\underline{x})$

Predictive Distribution

وفقاً لأسلوب التحليل البيزي يتم الحصول على التوزيع الاحتمالي التنبؤي في مجال التأمين، سواء كان لعدد المطالبات أو قيم المطالبات للعام القادم باستخدام معلومات الخبرة السابقة. حيث إن متوسط هذا التوزيع الاحتمالي التنبؤي يعبر عن قسط الخطر للعام القادم.

(Mackov,U. E., et al. 1996, p503)

ويتم الحصول على دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي بإجراء التكامل المحدود بالنسبة للمعلمة θ لحاصل ضرب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي للعام القادم $f(X_{k+1}/\theta)$ ودالة التوزيع البعدي لفترة الخبرة الأساسية$\pi(\theta/\underline{X})$ **. (Makov,2001, p 63−64)**

وقد استنتج William S. Jewell سنة 1974 بعض التوزيعات الاحتمالية الحدية لعائلة التوزيعات الاحتمالية الأسية، وقد توصل الي أنه اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو التوزيع الأسي والتوزيع الاحتمالي القبلي بيتا ، فإن التوزيع الاحتمالي التنبؤي هو مقلوب توزيع باريتو.

وكذلك اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بواسون والتوزيع القبلي جاما فإن التوزيع الاحتمالي التنبؤي هو توزيع ثنائي الحدين السالب.

وقد قام Jewell بتصميم جدول يوضح فيه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي والتوزيع القبلي والتوزيع التنبؤي لعائلة التوزيعات الاحتمالية الأسية. **(Jewell,1974, p 87-88)**

وفي هذا البحث سوف يتم إستنتاج التوزيع الاحتمالي التنبؤي لكل من عدد المطالبات وقيم المطالبات، ثم إيجاد التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي حيث يكون المتغير العشوائي لهذا التوزيع هو عبارة عن إجمالي قيم المطالبات.

يكمن الاختلاف الأساسي بين نظرية الخطر التجميعي ونظرية الخطر الفردي في أن الأولي تنظر الي محفظة التأمين كوحدة واحدة، ولا تهتم بالمكونات الفردية للمحفظة.وبالتالي ليس من الضروري معرفة السلوك العشوائي للوحدات النعرضة للخطر علي المستوي الفردي داخل محفظة التأمين.ومن ثم يكون محل اهتمام هذه النظرية هو إجمالي المطالبات لمحفظة التأمين ككل.

وتعتمد نظرية الخطر التجميعي علي افتراضين أساسيين : أولاً: أن قيم المطالبات عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي ، ثانياً:أن هناك استقلال بين عدد المطالبات وحجم المطالبة. ويتحدد شكل دالة إجمالي قيم المطالبات وتوزيعها الاحتمالي وفقاً لنظرية الأخطار التجميعية. **(سليمان، ٢٠٠٩، ص ١٩: ٢٠)**

المبحث الثاني

النموذج الكمي المقترح للتسعير باستخدام أسلوب التحليل البيزي للبيانات

فـــي هـــذا المبحـــث ســـيتم تحديـــد التوزيـــع الاحتمـــالي الإجمـــالي التنبـــؤي Predective Aggregate Distribution لقـيم المطالبـات الخاصـة بوثيقـة تـأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري.

وفي ضوء إستخدام أسلوب التحليل البيزي للبيانات (عدد المطالبات ، وقيم المطالبات) والذي يفترض أن هناك معلومات قبلية حول معلمة التوزيع الاحتمالي الأصلي للبيانات Data Distribution ، وأن هذه المعلومات من الممكن أن تكون عن نفس المتغير العشوائي أو بيانات أخري مشابهة، لذا فقد تم تقسيم بيانات فترة الخبرة المجمعة (٢٠١٣-٢٠٢٠) الي ثلاث فترات بالإعتماد علي بيانات أو معلومات عن نفس المتغير العشوائي كما يلي:

أ- فترة خبرة ما قبل (٢٠١٣)

وهي فترة خبرة قبلية معدومة المعلومات أي بفرض عدم وجود خبرة قبل ٢٠١٣ Non-Informative Prior عن المتغير العشوائي (عدد المطالبات – قيم المطالبات).

ب- فترة خبرة قبلية من (٢٠١٣ – ٢٠١٥)

وهي فترة خبرة قبلية تتوافر فيها معلومات عن المتغير العشوائي، وقد تم الإعتماد فيها علي بيانات أو خبرة الوثائق الات ومعدات المقاولين لمجموعة من شركات التأمين.

ج- فترة الخبرة الأساسية من (٢٠١٦ – ٢٠٢٠)

وهذه فترة الخبرة الأساسية في عملية تسعيروثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق النأمين المصري.

أولاً: تقدير التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات

ويتم الحصول على دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي $f\left(N_{k+1}/\underline{\mathrm{N}}_2\right)$ بإجراء التكامل المحدود بالنسبة للمعلمة P لحاصل ضرب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي للعام القادم $f\left(N_{k+1}/\mathrm{p}\right)$ ودالة التوزيع البعدي لفترة الخبرة الأساسية $\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_2\right)$.

١- خطوات تقدير التوزيع الاحتماي التنبؤي لعدد المطالبات وفقاً لأسلوب التحليل البيزي:

تم تقدير التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات وفقاً للتحليل البيزي بتحديد كل من: التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات ، والتوزيع الاحتمالي القبلي والبعدي لمعلمة التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات. وفيما يلي خطوات تقدير التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات:

الخطوة الأولي: تحديد التوزيع الاحتمالي لعدد المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية $\left(\underline{\mathbf{N}}_2\right)$ (٢٠١٦- ٢٠٢٠)

بفرض أن (N_i) متغير عشوائي يعبر عن عدد مطالبات آلات ومعدات المقاولين حيث إن $(i = 0,1,2, \dots)$ وإن هذا المتغير له توزيع احتمالي نظري منفصل والجدول التالي يوضح توزيع عدد وثائق تأمين الات ومعدات المقاولين حسب عدد المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠).

جدول رقم (٢-١)

التوزيع التكراري لعدد المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين

خلال فترة الخبرة الأساسية (2016-2020)

عدد المطالبات	عدد الوثائق
0	5916
1	668
2	149
3	14
4	4
5	2
الإجمالي	**6753**

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

ومن التحليل الإحصائي للبيانات نجد أن :

توقع عدد المطالبات $\mathrm{E}\left(\underline{\mathrm{N}}_2\right) = 0.153117$

تباين عدد المطالبات $\mathrm{Var}\left(\underline{\mathrm{N}}_2\right) = 0.199271$

وقد قام الباحث بإجراء اختبار كولمجروف- سيمرنوف (Kolmogorov- Simnrov Test) لجودة التوفيق لبيانات عدد المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين مع معظم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ،وقد تبين للباحث أن هذه البيانات تتفق مع توزيع ذي الحدين السالب.

أ- تقدير معالم توزيع ثنائي الحدين السالب (r_2, p)

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب فإن دالة الاحتمال الخاصة به تأخذ الصيغة التالية:

(Rohatgi, V.& Saleh, A., 2015, p.178)

$$f(N=n) = \binom{r_2+n_i-1}{n_i} \mathrm{p}^{r_2}(1-\mathrm{p})^{n_i} \qquad ; n = 0,1,2,3 ....$$

وبحل المعادلتين التاليتين تم تقدير معالم التوزيع فكانت علي النحو التالي :

$$\frac{r_2(1-p)}{p} = 0.153117 \quad (1) \quad , \quad \frac{r_2(1-p)}{p^2} = 0.199271 \quad (2)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن قيم معالم توزيع ثنائي الحدين السالب هي:

$$p = 0.76838654 \qquad r_2 = 0.50797195$$

ب-حساب الاحتمالات والتكرارات النظرية المقابلة لعدد المطالبات لتوزيع ذي الحدين السالب

يتم إيجاد الاحتمال النظري عند (N = 0) من خلال العلاقة التالية:

$$P(\mathrm{N}=0) = \mathrm{p}^{r_2} = 0.87473745$$

ويمكن إيجاد باقي الاحتمالات لقيم N من خلال العلاقة التالية:

$$P(N=n) = \frac{P(n-1)\,(n+r-1)\,(1-p)}{n}$$

وبالتالي يمكن حساب التكرارات النظرية من خلال ضرب هذه الاحتمالات التي حصلنا عليها بعدد الوحدات البالغ (6753) وثيقة.

جدول رقم (٢-٢)

التوزيع النظري لعدد المطالبات باستخدام توزيع ذي الحدين السالب

عدد المطالبات N_i	الاحتمالات النظرية $P'_{(n_i)}$	التكرارات النظرية $F'(x_i)$
0	0.874737	5907
1	0.102916	695
2	0.017972	121
3	0.003480	24
4	0.000707	5
5	0.000148	1
Sum	**1.000000**	**6753**

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

ج- اختبار جودة توفيق البيانات مع توزيع ذي الحدين السالب

لاختبـــار صـــحة الفـــرض القائـــل بـــأن البيانـــات الخاصـــة بعـــدد المطالبـــات فـــي وثيقـــة تـــأمين آلات ومعـــدات المقـــاولين تتبـــع توزيـــع ذي الحـــدين الســـالب مـــن عدمـــه نجـــري اختبار كولمجروف- سيمرنوف كما يلي:

جدول رقم (٢-٣)

اختبار (K – S) لجودة التوفيق لتوزيع ذي الحدين السالب لعدد المطالبات

في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين

عدد المطالبات N_i	الاحتمالات التراكمية الفعلية $P(n_i)\uparrow$	والاحتمالات التراكمية النظرية $P'(n_i)\uparrow$	الفرق المطلق $P(n_i)\uparrow - P'(n_i)\uparrow$
0	0.876055	0.874737	0.001318
1	0.974974	0.977653	0.002679
2	0.997038	0.995626	0.001413
3	0.999112	0.999106	0.000006
4	0.999704	0.999812	0.000109
5	1.000000	1.000000	0.000000

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

من خلال الجدول السابق رقم (٢-٣) نلاحظ أن أكبر قيمة للفرق بين الاحتمالين التراكمي الفعلي والتراكمي النظري هي (0.002679)، وحيث أن القيمة الجدولية عند مستوي معنوية 5 % وحجم عينة $(n = 6753)$ هي $\frac{1.36}{\sqrt{6753}} = 0.0165497$. بالمقارنة نجد أن القيمة الفعلية لاختبار سميرنوف أصغر من القيمة الجدولية أي لا يوجد فرق معنوي بين التوزيعين الفعلي والنظري، وبالتالي لا يمكننا رفض الفرض العدمي القائل بأن عدد المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين يتبع توزيع ذي الحدين السالب.

الخطوة الثانية: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة ما قبل (٢٠١٣) $(\underline{\mathbf{N}}_{\mathbf{0}})$ فترة بدون معلومات

عندما لا تتوافر أي معلومات عن المعلمة p وكانت p تتراوح بين الصـــفر والواحد، فإن دالة التوزيع الاحتمالي البعدي حيث لا توجد عينة $\pi(\mathrm{p})$ تتبع التوزيع المنتظم وهو على الشـــكل التالي:

$$\pi(\mathrm{p}) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad ; \ \alpha < \mathrm{p} < \beta$$

وحيث أن المتغير العشوائي (عدد المطالبات) خلال فترة الخبرة الأساسية يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب وأن:

$$0 < \mathrm{p} < 1$$

أي أن $\alpha = 0 \qquad \beta = 1$

فإن التوزيع الاحتمالي القبلي يكون على الشكل التالي:

$$\pi(\mathrm{p}) = \frac{1}{\beta - \alpha} = 1$$

أي أن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة ما قبل ٢٠١٣ مع عدم وجود أي معلومات $\pi(\mathrm{p}) = 1$ وهو يعتبر التوزيع الاحتمالي القبلي لفترة الخبرة (٢٠١٣-٢٠١٥)

(Morgan, 1983, p.47−48)

الخطوة الثالثة: تحديد دالة الإمكان خلال الفترة القبلية$(\underline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}})$ (٢٠١٣- ٢٠١٥)

الجدول التالي يوضح توزيع عدد وثائق الات ومعدات المقاولين حسب عدد المطالبات خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥)

جدول رقم (٢-٤)

التوزيع التكراري لعدد المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين

خلال فترة الخبرة القبلية (2013-2015)

عدد المطالبات	عدد الوثائق
0	3099
1	330
2	87
3	9
4	2
الإجمالي	**3527**

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

ومن التحليل الإحصائي للبيانات نجد أن:

توقع عدد المطالبات $\mathrm{E}(\underline{\mathrm{N}}_1) = 0.152821$

تباين عدد المطالبات $\mathrm{Var}(\underline{\mathrm{N}}_1) = 0.200916$

وحيث إن المتغير العشوائي (عدد المطالبات) يتبع توزيع ذي الحدين السالب خلال فترة الخبرة الأساسية، فإن المتغير العشوائي (عدد المطالبات) يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥). **(إسماعيل، ٢٠٠٥، ص. ١١٢)**

- توقع وتباين عدد المطالبات للتوزيع الفعلي = توقع وتباين توزيع ثنائي الحدين السالب خلال فترة الخبرة القبلية وبحل المعادلتين التاليتين تم تقدير معالم التوزيع فكانت علي النحو التالي :

$$\frac{r_1(1-p)}{p} = 0.152821 \quad (1) \quad , \quad \frac{r_1(1-p)}{p^2} = 0.200916 \quad (2)$$

$$p = 0.760623222 \qquad r_1 = 0.485591267$$

- أي أن عدد المطالبات خلال فترة الخبرة القبلية يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب بمعامل $(r_1 = 0.485591267,\ p = 0.760623222)$ وتكون دالة الاحتمال على الشكل التالي:

$$f(\underline{N}_1/p) = \binom{n+r_1-1}{n} p^{r_1}(1-p)^n \qquad ;\ \underline{N}_1 = 0,1,2,3 \ldots.$$

كما أن دالة الإمكان تكون على الشكل التالي:

$$f(\underline{N}_1/p) = \prod_{i=1}^{k_1} C_{n_i}^{n_i+r_1-1}\ p^{r_1}(1-p)^{n_i}$$

ونجد أن والمقدار $C_{n_i}^{n_i+r_1-1}$ لا يعتمد في حسابه على p فيختزل في ثابت التناسب فنجد أن:

$$f(\underline{N}_1/p) \propto p^{k_1 r_1}\ (1-p)^{\sum_{i=1}^{k_1} n_i}$$

حيث إن $T_1 = \sum_{i=1}^{k_1} n_i$ تسمي بالإحصاء الكافي تعبر عن إجمالي عدد المطالبات خلال فترة الخبرة القبلية ، k_1 تمثل حجم عينة فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥)

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k_1} n_i = 539 \quad , \quad k_1 = 3527$$

وبالتالي فإن دالة الامكان هي:

$$f(\underline{N}_1/p) \propto p^{k_1 r_1}(1-p)^{T_1}$$

الخطوة الرابعة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية$(\underline{N}_1)$ (٢٠١٣- ٢٠١٥)

لتحديد التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1)$ أي التوزيع الاحتمالي بعد الحصول على العينة$(\underline{\mathrm{N}}_1)$ وهي حجم الخبرة خلال الفترة (٢٠١٣-٢٠١٥)، يتم دمج دالة الإمكان خلال هذه الفترة مع التوزيع القبلي $\pi(\mathrm{p}) = 1$ حيث إن التوزيع البعدي يتناسب مع التوزيع المشترك بينهما. **(Koch, Karl−Rudolf, 2007, pp.12−13)**

وحيث أن التوزيع الاحتمالي القبلي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) هو عبارة عن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة ما قبل ٢٠١٣ وهو $\pi(\mathrm{p})$ حيث إن:

$$\pi(\mathrm{p}) = 1$$

ويتم الحصول على التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) ويرمز له بالرمز $\pi(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_0)$ ، أي تحديد التوزيع الاحتمالي للمعلمة p بعد الحصول على العينة من فترة الخبرة القبلية كما يلي:

$$\pi(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1) \propto f(\underline{\mathrm{N}}_1/\mathrm{p})\,\pi(\mathrm{p})$$

وحيث $\pi(\mathrm{p}) = 1$ فإن:

$$\pi(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1) \propto f(\underline{\mathrm{N}}_1/\mathrm{p})$$

$$\pi(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1) \propto \mathrm{p}^{k_1 r_1}\,(1-\mathrm{p})^{T_1}$$

أي أن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية يتناسب مع دالة الإمكان، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) وهو عبارة عن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة القبلية فقط، حيث إن التوزيع الاحتمالي القبلي خلال فترة الخبرة القبلية $\pi(\mathrm{p})$ لم يؤثر حيث إنه مستنتج من فترة خبرة ما قبل ٢٠١٣ ولا يتوافر أي معلومات عن هذه الفترة ويكون الاعتماد في حساب أي تقديرات على بيانات الخبرة القبلية

ويلاحظ أن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) يكون علي شكل دالة بيتا بمعالم:

$$\beta(k_1 r_1 + 1,\ \mathrm{T}_1 + 1)$$

وهو في نفس الوقت توزيع احتمالي قبلي لفترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠).

الخطوة الخامسة:تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية$(\underline{N}_2)$ (٢٠١٦-٢٠٢٠)

عـدد المطالبـات خـلال فتـرة الخبـرة الأساسـية يتبـع توزيـع ثنـائي الحـدين السـالب بمعامل $(r_2\ ,\ p)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية على الشكل التالي:

$$f(N=n) = \binom{r_2+n_i-1}{n_i} \mathrm{p}^{r_2}(1-\mathrm{p})^{n_i} \qquad ;\ n\ =\ 0,1,2,3\ ....$$

حيث إن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية هي:

$$f\left(\underline{\mathrm{N}}_2/\mathrm{p}\right) = \prod_{i=1}^{k_2} \mathrm{C}_{n_i}^{r_2+n_i-1} \mathrm{p}^{r_2}(1-\mathrm{p})^{n_i}$$

ونجد أن المقدار $\mathrm{C}_{n_i}^{r_2+n_i-1}$ لا يعتمد على p فيمكن اختزاله في ثابت التناسب

$$f\left(\underline{\mathrm{N}}_2/\mathrm{p}\right)\ \propto\ \mathrm{p}^{k_2 r_2}(1-\mathrm{p})^{\sum_{i=1}^{k_2}\mathrm{n}_i}$$

والمقدار $T_2\ =\sum_{i=1}^{k_2} n_i$ يمثل إحصاء كافي وهو عبارة عن إجمالي عدد المطالبات، k_1 تمثل حجم العينة خلال فترة الخبرة الأساسية.

$$\mathrm{T}_2 = \sum_{i=1}^{k_2} \mathrm{n}_i = 1034 \qquad , \qquad \mathrm{k}_2 = 6753$$

وبالتالي فإن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية تكون على الشكل التالي:

$$f\left(\underline{\mathrm{N}}_2/\mathrm{p}\right) \propto \mathrm{p}^{k_2 r_2}(1-\mathrm{p})^{T_2}$$

الخطوة السادسة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية$(\underline{N}_2)$ (٢٠١٦-٢٠٢٠)

يتم استنتاج التوزيع الاحتمالي البعدي لفترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠) بدمج دالة الإمكان لفترة الخبرة الأساسية $f\left(\underline{\mathrm{N}}_2/\mathrm{p}\right)$ مع التوزيع الاحتمالي القبلي لفترة الخبرة الأساسية $\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1\right)$.وبالتالي يتم تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية كما يلي:

$$\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_2\right)\ \propto\ f\left(\underline{\mathrm{N}}_2/\mathrm{p}\right)\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1\right)$$

$$\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_2\right)\ \propto\ \mathrm{p}^{k_2 r_2}(1-\mathrm{p})^{T_2}\ \mathrm{p}^{k_1 r_1}(1-\mathrm{p})^{T_1}$$

$$\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_2\right)\ \propto\ \mathrm{p}^{k_1 r_1+k_2 r_2}\ (1-\mathrm{p})^{T_1+T_2}$$

ويلاحظ أن التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية يتناسب مع توزيع بيتا بمعالم $\beta(k_1 r_1 + k_2 r_2 + 1,\ \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + 1)$

وتكون دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية هي دالة بيتا على الشكل التالي:

$$\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1\right) = \frac{1}{\beta(k_1 r_1 + k_2 r_2 + 1, \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + 1)}\ \mathrm{p}^{k_1 r_1+k_2 r_2}(1-\mathrm{p})^{T_1+T_2}$$

$$\mathrm{k}_1 = 3527 \qquad r_1 = 0.485591267 \qquad \mathrm{T}_1 = 539$$

$$\mathrm{k}_2 = 6753 \qquad r_2 =\ 0.50797195 \qquad \mathrm{T}_2 = 1034$$

الخطوة السابعة: تقدير التوزيع الاحتمالي التنبؤي $f\left(N_{k+1}/\underline{N}_2\right)$ لعدد المطالبات

وهذا التوزيع يسمي أيضاً التوزيع التنبؤي للمشاهدات مستقبلاً predicting a future observation ومتوسط هذا التوزيع يعبر عن متوسط عدد المطالبات المتوقع أو معدل تكرار الخسارة المتوقع.

ويتم استنتاج هذا التوزيع بإجراء التكامل المحدود لحاصل ضرب دالة التوزيع الاحتمالي الأصلي للبيانات للسنة القادمة ودالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية

$$f\left(N_{k+1}/\underline{\mathrm{N}}_1\right) = \int_0^1 f(N_{k+1}/\mathrm{p})\,\pi\left(\mathrm{p}/\underline{\mathrm{N}}_1\right).d\mathrm{p}$$

والتكامل يكون بالنسبة ل p ومن صفر الي 1 لأن قيمة p تتراوح من صفر الي 1.

$$f(N_{k+1}/p) = \mathrm{C}_{N_{k+1}}^{N_{k+1}+r_2-1}\, p^{r_2}(1-p)^{N_{k+1}} \qquad (1)$$

$$\pi\left(p/\underline{\mathrm{N}}_2\right) = \frac{1}{\beta(k_1 r_1 + k_2 r_2 + 1, T_1 + T_2 + 1)}\, \mathrm{p}^{\mathrm{k}_1 r_1 + \mathrm{k}_2 r_2}\,(1-\mathrm{p})^{T_1+T_2} \qquad (2)$$

بضرب معادلة (١) × (٢) مع إجراء التكامل المحدود

$$f\left(N_{k+1}/\underline{\mathrm{N}}_2\right) = \frac{\mathrm{C}_{N_{k+1}}^{N_{k+1}+r_2-1}}{\beta(\mathrm{k}_1 r_1 + \mathrm{k}_2 r_2 + 1, \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + 1)} \int_0^1 \mathrm{p}^{r_2 + k_1 r_1 + \mathrm{k}_2 r_2}(1-\mathrm{p})^{N_{k+1}+T_1+T_2}.dp$$

$$f\left(N_{n+1}/\underline{\mathrm{N}}_2\right) = \frac{\mathrm{C}_{N_{k+1}}^{N_{k+1}+r_2-1}\quad \beta(r_2 + \mathrm{k}_1 r_1 + \mathrm{k}_2 r_2 + 1\,, N_{k+1} + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + 1)}{\beta(\mathrm{k}_1 r_1 + \mathrm{k}_2 r_2 + 1\,, N_{k+1} + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + 1)}$$

- بالتعويض عن قيمة $(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \mathrm{r}_1, r_2, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ في الدالة السابقة

وبإجراء الاشتقاقات والاستنتاجات اللازمة نحصل علي شكل دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات كما يلي :

$$f\left(N_{k+1}/\underline{\mathrm{N}}_1\right) = \mathrm{C}_{N_{k+1}}^{N_{k+1}+1-1}(0.765739)^1(1-0.765739)^{N_{k+1}}$$

والدالة السـابقة هي دالة توزيع ثنائي الحدين السـالب أي أن دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات هي دالة توزيع ثنائي الحدين السالب بمعالم$(r = 1\,,\quad \mathrm{p} = 0.765739)$ أي أن:

وبالتالي فان التوقع والتباين لهذا التوزيع هما:

$$\mathrm{E}(N_{k+1}) = \frac{1(1-0.76573894925)}{0.76573894925} = 0.30592808552$$

$$\mathrm{V}(N_{k+1}) = \frac{1(1-0.76573894925)}{(0.76573894925)^2} = 0.39952007903$$

٢ ـ تقدير العزوم الأربعة للتوزيع الإحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات حول الصفر والمتوسط

١/٢ حساب العزوم الأربعة للتوزيع الإحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات حول الصفر

دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات هي دالة توزيع ثنائي الحدين السالب بمعالم($r = 1 , \quad \mathrm{p} = 0.765739$).

تم حساب العزوم الأربعة حول الصفر وفقاً لدالة توليد العزوم للتوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات وهو توزيع ذي الحدين السالب باستخدام برنامج(Mathcad Prime 6) كما يلي : **(Weisstein,2005)**

$$\mu_1{}'(N) = \mathrm{E}(N_{k+1}) = \frac{r(1-p\ )}{p} = 0.30592808552$$

$$\mu_2{}'(N) = \frac{rq[1+rq]}{p^2} = 0.493112073$$

$$\mu_3{}'(N) =$$

$$= \frac{q[rp^2 + 3pq(r^2 + \mathrm{r}) + q^2(r^3 + 3r^2 + r)]}{p^3}$$

$$= 1.039274563$$

$$\mu_4{}'(N) =$$

$$= \frac{q[rp^3 + 7p^2q(r^2 + r) + 6pq^2(r^3 + 3r^2 + r) + q^3(r^4 + 6r^3 + 11r^2 + 6r)]}{p^4}$$

$$= 2.857210163$$

٢/٢ حساب العزوم الأربعة للتوزيع الإحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات حول المتوسط للوثيقة الواحدة

– باســتخدام العلاقة بين العزوم حول المتوســط والعزوم حول الصــفر أمكن تقدير العزوم المركزيـة الأربعـة للتوزيع الإحتمـالي التنبؤي لعـدد المطـالبـات حـول المتوســط لتوزيع ذي الحدين السالب باستخدام برنامج (Mathcad Prime 6) كما يلي:

$$\mu_{1n}(N) = zero$$

$$\mu_{2n}(N) = \mathrm{V}(N_{k+1}) = \mu_2{}'(N) - [\mu_1{}'(N)]^2$$
$$= 0.399520079$$

$$\mu_{3n}(N) = \mu_3{}'(N) - 3\mu_2{}'(N)\mu_1{}'(N) + 2[\mu_1{}'(N)]^3$$
$$= 0.643968905$$

$$\mu_{4n}(N) = \mu_4{}'(N) - 4\mu_3{}'(N)\mu_1{}'(N) + 6\mu_2{}'(N)[\mu_1{}'(N)]^{\mathbf{2}} + 3[\mu_1{}'(N)]^{\mathbf{4}}$$
$$= 1.836066721$$

٣/٢ حساب العزوم الأربعة الأولي لإجمالي الوثائق

– باستخدام المعادلات التي توصل اليها(Thomas A. Aiuppa) أمكن تقدير العزوم الأربعة لإجمالي عدد الوثائق($m = 6753$)باستخدام برنامج (Mathcad Prime 6) كما يلي:**(Aiuppa, 1988, p.430)**

$$\mu_1(N) = m\,\mu$$
$$= 6753 \times 0.30592808552 = 2066$$

$$\mu_2(N) = m\,\mu_2$$
$$= 6753 \times 0.399520079 = 2698$$

$$\mu_3(N) = m\,\mu_3$$
$$= 4349$$

$$\mu_3(N) = m\,(\mu_3 - 3\,\mu_2{}^2) + 3m^2\,\mu_2{}^2$$
$$= 21846115$$

ثانياً: تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات

١- خطوات تقدير التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات وفقاً لأسلوب التحليل البيزي:

يتم اتباع نفس خطوات التحليل الإحصائي البيزي المتبعة بالنسبة لعدد المطالبات، وذلك بتحديد: التوزيع الاحتمالي الأصلي للبيانات والتوزيع الاحتمالي القبلي، والتوزيع الاحتمالي البعدي للمعلمة والتوزيع الاحتمالي التنبؤي للمتغير العشوائي للسنة القادمة.

الخطوة الأولي: تحديد التوزيع الاحتمالي لقيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية($\underline{X}_2$) (٢٠١٦-٢٠٢٠)

بفرض أن (X_i) متغير عشوائي يعبر عن قيم المطالبات حيث إن ($i=0,1,2,\ldots.$)، وأن هذا المتغير له توزيع احتمالي نظري متصل. والجدول التالي يوضح توزيع عدد مطالبات وثائق تأمين الات ومعدات المقاولين حسب فئات قيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠).

جدول رقم (٢-٥)

التوزيع التكراري لقيم المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين خلال فترة الخبرة الأساسية (2020-2016)

فئات الخسارة	عدد المطالبات
0-50000	643
100000-50000	230
150000-100000	75
200000-150000	39
250000-200000	19
300000-250000	11
350000-300000	5
400000-350000	3
450000-400000	5
500000-450000	2
1000000-500000	2
sum	**1034**

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

ومن التحليل الإحصائي للبيانات نجد أن:

توقع قيم المطالبات $E(\underline{X}_2) = 62040.6190$

تباين قيم المطالبات $Var(\underline{X}_2) = 5130652122$

وقد قام الباحث باختبار كولمجروف- سيمرنوف (Kolmogorov- Simnrov Test) لجودة التوفيق لبيانات قيم المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين مع التوزيعات الاحتمالية المتصلة ، وقد تبين للباحث أن هذه البيانات تتفق مع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

أ- تقدير معلمات التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي $(\mu\,,\sigma_2{}^2)$

المتغير العشوائي (X) يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير(X) تأخذ الشكل التالي: **(Pacáková, V., 2015, p160)**

$$f(X/\mu) = \frac{1}{\sigma_2\, x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2}(\ln x-\mu)^2}$$

بمساواة توقع وتباين توزيع قيمة المطالبة الفعلي بتوقع وتباين التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي:

$$e^{\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma_2{}^2\right)} = 62040.6190 \quad , \qquad e^{2\mu+\sigma_2{}^2}\left(e^{\sigma_2{}^2}-1\right) = 5130652122$$

وبقسمة معادلة التباين على مربع معادلة التوقع ينتج أن:

$$\mu = 10.6119735609 \qquad \sigma_2{}^2 = 0.92040320922$$

ووفقاً للتحليل البيزي فإن معلمة μ متغير عشوائي بينما المعلمة $\sigma_2{}^2$ تم اعتبارها ثابتة خلال فترة الخبرة والتي تختلف باختلاف فترة الخبرة.

ب- حساب الاحتمالات والتكرارات النظرية المقابلة لقيم المطالبات للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

- المتحول المعياري (z) يحسب وفق العلاقة التالية:

$$z = \left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)$$

- يحسب الاحتمال النظري التراكمي بالعلاقة التالية:

$$\emptyset(z) = \emptyset\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)$$

- وبالتالي يمكن حساب التكرارات النظرية التراكمية من خلال ضرب هذه الاحتمالات النظرية التراكمية التي حصلنا عليها في مجموع الخسائر(1034).

جدول رقم (٢-٦)

التوزيع النظري لقيم المطالبات باستخدام التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

الحد الأعلى للفئة المطالبات X_i	لوغاريتم الحد الأعلى للفئة $\ln x_i$	الدرجة المعيارية z	الاحتمال النظري التراكمي $\emptyset(z)$	التكرار النظري التراكمي $F'(x_i)\uparrow$	التكرار النظري $F(x_i)$
50000	10.819778	0.23	0.5910	611	611
100000	11.512925	0.98	0.8365	865	254
150000	11.918391	1.42	0.9222	954	89
200000	12.206073	1.73	0.9582	991	37
250000	12.429216	1.97	0.9756	1009	18
300000	12.611538	2.17	0.9850	1018	9
350000	12.765688	2.34	0.9904	1024	6
400000	12.899220	2.49	0.9936	1027	3
450000	13.017003	2.61	0.9955	1029	2
500000	13.122363	2.73	0.9968	1031	2
1000000	13.815511	3.48	0.9997	1034	3
sum					1034

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

ج- اختبار جودة توفيق البيانات مع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

لإختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات الخاصة بقيم المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي من عدمه نجري اختبار كولمجروف-سيمرنوف كما يلي:

جدول رقم (٢-٧)

اختبار (K – S) لجودة التوفيق للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي لقيم المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين

الحد الأعلى لفئات المطالبات X_j	الاحتمالات التراكمية الفعلية $P(n_j)\uparrow$	والاحتمالات التراكمية النظرية $P'(n_j)\uparrow$	الفرق المطلق $P(n_j)\uparrow - P'(n_j)\uparrow$
50000	0.6219	0.5910	0.0309
100000	0.8443	0.8365	0.0078
150000	0.9168	0.9222	0.0054
200000	0.9545	0.9582	0.0037
250000	0.9729	0.9756	0.0027
300000	0.9836	0.9850	0.0014
350000	0.9884	0.9904	0.0020
400000	0.9913	0.9936	0.0023
450000	0.9961	0.9955	0.0006
500000	0.9981	0.9968	0.0013
1000000	1.0000	1.0000	0.0003

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

من خلال الجدول السابق رقم (٢-٧) نلاحظ أن أكبر قيمة للفرق بين الاحتمالين التراكمي الفعلي والتراكمي النظري هي (0.0309)، وحيث أن القيمة الجدولية عند مستوي معنوية **5** % وحجم عينة $(n = 1034)$هي $\frac{1.36}{\sqrt{1034}} = 0.042294$. بالمقارنة نجد أن القيمة الفعلية لاختبار سميرنوف أصغر من القيمة الجدولية أي لا يوجد فرق معنوي بين التوزيعين الفعلي والنظري، وبالتالي لا يمكننا رفض الفرض العدمي القائل بأن قيم المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

الخطوة الثانية: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة ما قبل (٢٠١٣) $(\underline{X}_0)$

عندما لا تتوافر أي معلمات عن المعلمة μ وذلك خلال فترة ما قبل ٢٠١٣ وكانت قيمة μ تتراوح ما بين ($-\infty < \mu < \infty$)، فإن التوزيع الاحتمالي البعدي حيث لا توجد عينة هو $\pi(\mu)$ ، ويكون تقدير قيمة μ هو μ^* وهي قيمة μ قبل الحصول على العينة حيث أن:

$$\pi(\mu) \propto d\mu$$

وهو توزيع غير كامل لأن تكامل هذا التوزيع يعتمد على مدي المعلمة μ يعطي ∞ ، وعلي ذلك فإن تقدير قيمة μ في ظل عدم توافر أي بيانات وبفرض أن μ تتبع التوزيع الطبيعي بمعالم(a, b^2) هو:

$$\mu^* = \frac{n/\sigma^2\,\bar{x} + a/b^2}{n/\sigma^2 + 1/b^2}$$

ويلاحظ من التقدير السابق ل μ أنه إذا كانت $(b^2 = \infty)$ أي أن تباين البيانات ما قبل سنة ٢٠١٣ بلغ ∞ أي لا توجد بيانات، فإن تقدير μ قبل الحصول على العينة هو $\mu^* = \bar{x}$ أي أن تقديرμ سوف يكون بالاعتماد على العينة أو فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي القبلي يعتمد علي دالة الإمكان خلال هذه الفترة والذي يعتبر هو التوزيع البعدي، حيث لا توجد أي معلومات سابقة والذي يكون بدوره هو التوزيع القبلي لفترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠) . **(حافظ، ٢٠١٥، ص٢٥٦) (إسماعيل، ٢٠٠٥، ص. ١٢١)**

الخطوة الثالثة: تحديد دالة الإمكان خلال الفترة القبلية$(\underline{X}_1)$ (٢٠١٣- ٢٠١٥)

الجدول التالي يوضح توزيع عدد مطالبات وثائق الات ومعدات المقاولين حسب فئات الخسارة خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥)

جدول رقم (٢-٨)

التوزيع التكراري لقيم المطالبات في وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين خلال فترة الخبرة القبلية (2013-2015)

فئات الخسارة	عدد المطالبات
0-50000	337
100000-50000	120
150000-100000	40
200000-150000	20
250000-200000	10
300000-250000	5
350000-300000	3
400000-350000	1
450000-400000	3
sum	**539**

المصدر: من إعداد الباحث، اعتمادا على التحليل الإحصائي للبيانات

ومن التحليل الإحصائي للبيانات نجد أن:

توقع قيم المطالبات $E(\underline{X}_1) = 59693.8776$

تباين قيم المطالبات $V(\underline{X}_1) = 3870546363$

وحيث إن المتغير العشوائي (قيم المطالبات) يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي خلال فترة الخبرة الأساسية، فإن المتغير العشوائي (قيم المطالبات) يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥)

- أي أن قيم المطالبات خلال فترة الخبرة القبلية يتبع توزيع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي بمعالم $(\mu = 10.629310891,\ \sigma_1^2 = 0.8575241686)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية على الشكل التالي:

$$f(X/\mu) = \frac{1}{\sigma_1\, x\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\ln x-\mu)^2}$$

فنجد أن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) تكون على الشكل التالي:

$$f(\underline{X}_1/\mu) = \prod_{i=1}^{k_1} \frac{1}{\sigma_1\, x_{1i}\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\ln x_{1i}-\mu)^2}$$

حيث إن k_1 تمثل عدد مطالبات فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) حيث إن $k_1 = 539$

$$f(\underline{X}_1/\mu)\ \propto\ e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{k_1}(\ln x_i-\mu)^2}$$

وبعد إجراء الاختصارات فإن دالة الإمكان تكون على الشكل التالي:

$$f(\underline{X}_1/\mu)\ \propto\ e^{-\frac{k_1}{2\sigma_1^2}\left(\mu-\frac{T_1}{k_1}\right)^2}$$

ويتضح أن شكل دالة الإمكان تتناسب مع التوزيع الطبيعي ومعالم التوزيع $\left[\frac{T_1}{k_1}, \frac{\sigma_1^2}{k_1}\right]$ باعتبار أن المتغير العشوائي هنا هو المعلمة μ وبالتالي فان متوسط هذا التوزيع $\frac{T_1}{k_1}$ وتباينه $\frac{\sigma_1^2}{k_1}$.

الخطوة الرابعة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية$(\underline{X}_1)$ (٢٠١٣- ٢٠١٥)

التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) سوف يعتمد علي دالة الإمكان فقط والذي يعتبر التوزيع الاحتمالي القبلي لفترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠) .

ودالة الإمكان السابقة تعتبر هي دالة التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) وهي في نفس الوقت تعتبر التوزيع الاحتمالي القبلي لفترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠) وتكون هذه الدالة باعتبارها التوزيع القبلي لفترة الخبرة الأساسية كالتالي:

$$\pi(\mu/\underline{X}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma_1}{k_1}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2/k_1}\left(\mu-\frac{T_1}{k_1}\right)^2}$$

حيث إن:

$$\mathrm{k}_1 = 539 \qquad \sigma_1^2 = 0.8575241686 \qquad \mathrm{T}_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \ln x_i = 5679.4298$$

وبالتالي فإنه يمكن تحديد المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي القبلي خلال الفترة القبلية (٢٠١٣-٢٠١٥) كما يلي:

$$E(\mu)=\frac{T_1}{k_1}=\frac{5679.4298}{539}=10.53697551$$

$$V(\mu)=\frac{{\sigma_1}^2}{k_1}=\frac{0.8575241686}{539}=0.00159095393$$

والمعالم السابقة هي متوسط وتباين المعلمة μ أما متوسط وتباين قيم المطالبات خلال فترة الخبرة القبلية كما سبق هما:

$$E(\underline{X}_1)=59693.8776$$

$$V(\underline{X}_1)=3870546363$$

الخطوة الخامسة:تحديد دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية$(\underline{X}_2)$ (٢٠١٦-٢٠٢٠)

قيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي بمعامل $(\sigma_2{}^2\ ,\ \mu)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية على الشكل التالي:

$$f(X/\mu)=\frac{1}{\sigma_2\,x\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2}(\ln x-\mu)^2}$$

حيث إن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية تم استنتاجها كما يلي:

$$f(\underline{X}_2/\mu)=\prod_{i=1}^{k_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2 x_{i2}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2}(\ln x_{i2}-\mu)^2}$$

$$f(\underline{X}_2/\mu)\ \propto\ e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2}\sum_{i=1}^{k_2}(\ln x_{i2}-\mu)^2}$$

ويمكن اختصار المقدار $\sum_{i=1}^{k_2}(\ln x_{i2}-\mu)^2$ بنفس الطريقة السابقة فنجد أن:

$$\sum_{i=1}^{k_2}(\ln x_{i2}-\mu)^2\rightarrow\ k_2\left(\mu-\frac{T_2}{k_2}\right)^2$$

حيث إن $T_2=\sum_{i=1}^{k_2}\ln x_i$ تمثل إحصاء كافي ويعبر عن مجموع لوغاريتمات قيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠)، و k_2 تمثل حجم العينة خلال فترة الخبرة الأساسية وبالتالي فإن دالة الإمكان خلال فترة الخبرة الأساسية تتناسب مع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f(\underline{X}_2/\mu)\ \propto\ e^{-\frac{k_2}{2\sigma_2{}^2}\left(\mu-\frac{T_2}{k_2}\right)^2}$$

حيث إن :

$$\mathrm{k}_2=1034\quad \sigma_2{}^2=0.9204032092\quad \mathrm{T}_2=\sum_{i=1}^{k_2}\ln x_i=11029.9209$$

الخطوة السادسة: تحديد التوزيع الاحتمالي البعدي خلال فترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠)

سيتم استنتاج التوزيع الاحتمالي البعدي لفترة الخبرة الأساسية (٢٠١٦-٢٠٢٠) بدمج دالة الإمكان لفترة الخبرة الأساسية $f\left(\underline{X}_2/\mu\right)$ مع التوزيع الاحتمالي القبلي لفترة الخبرة الأساسية $\pi\left(\mu/\underline{X}_1\right)$.

وحيث أن التوزيع الاحتمالي البعدي $\pi\left(\mu/\underline{X}_2\right)$ يتناسب مع كل من التوزيع الاحتمالي القبلي $\pi\left(\mu/\underline{X}_1\right)$ ودالة الإمكان $f\left(\underline{X}_2/\mu\right)$ فإن:

$$\pi\left(\mu/\underline{X}_2\right) \propto f\left(\underline{X}_2/\mu\right) \pi\left(\mu/\underline{X}_1\right)$$

$$\pi\left(\mu/\underline{X}_2\right) \propto e^{-\frac{k_2}{2\sigma_2{}^2}\left(\mu-\frac{T_2}{k_2}\right)^2 - \frac{k_1}{2\sigma_1{}^2}\left(\mu-\frac{T_1}{k_1}\right)^2}$$

ونجد أن:

$$\pi\left(\mu/\underline{X}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2}}}\; e^{-\frac{1}{2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2/\left(k_2\,\sigma_1{}^2+k_1\,\sigma_2{}^2\right)}\left[\mu-\frac{k_2\,\sigma_1{}^2\frac{T_2}{k_2}+k_1\,\sigma_2{}^2\frac{T_1}{k_1}}{k_2\,\sigma_1{}^2+k_1\,\sigma_2{}^2}\right]^2}$$

ويتضح من الدالة السابقة أن التوزيع الاحتمالي البعدي يتناسب مع التوزيع الطبيعي وأن معالم التوزيع هي:

$$\left[\frac{\sigma_1{}^2T_2 + \sigma_2{}^2T_1}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2}\;,\frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2}\right]$$

حيث إن:

$$\sigma_1{}^2 = 0.8575241686 \quad k_1 = 539 \quad \mathrm{T}_1 = 5679.4298$$

$$\sigma_2{}^2 = 0.9204032092 \quad k_2 = 1034 \quad \mathrm{T}_2 = 11029.9209$$

وبالتالي يمكن تقدير قيم معالم التوزيع الطبيعي $V(\mu)$ ، $E(\mu)$ باعتبار أن μ متغير عشوائي كما يلي:

$$E(\mu) = \frac{\sigma_1{}^2T_2 + \sigma_2{}^2T_1}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2} = 10.62050191$$

$$V(\mu) = \frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2} = 0.000570785$$

الخطوة السابعة: تقدير التوزيع الاحتمالي التنبؤي $f\left(X_{k+1}/\underline{x}_2\right)$ لقيم المطالبات

يتم إيجاد إستنتاج التوزيع الاحتمالي التنبؤي $f\left(X_{k+1}/\underline{x}_2\right)$ بإجراء التكامل المحدود بالنسبة للمعلمة μ لحاصل ضرب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي للعام القادم $f(X_{k+1}/\mu)$ ودالة التوزيع البعدي لفترة الخبرة الأساسية $\pi\left(\mu/\underline{\mathrm{X}}_2\right)$ حيث $(-\infty < \mu < \infty)$.

(Zhang,C.,2003, pp 381−382)

$$f\left(X_{k+1}/\underline{x}_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X_{k+1}/\mu)\, \pi\left(\mu/\underline{\mathrm{X}}_2\right).d\mu$$

ويلاحظ أن التكامل محدود لقيمة μ التي تتراوح بين $(-\infty,\infty)$ حيث إن:

$$f(X_{k+1}/\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_{k+1} + \sigma_2}\; e^{-\frac{1}{2{\sigma_2}^2}(\ln x_{k+1}-\mu)^2}$$

$$\pi\left(\mu/\underline{\mathrm{X}}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{k_2\,{\sigma_1}^2 + k_1\,{\sigma_2}^2}}}\; e^{-\frac{1}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2/(k_2\,{\sigma_1}^2+k_1\,{\sigma_2}^2)}\left[\mu-\frac{k_2\,{\sigma_1}^2\frac{T_2}{k_2}+k_1\,{\sigma_2}^2\,\frac{T_1}{k_1}}{k_2\,{\sigma_1}^2+k_1\,{\sigma_2}^2}\right]^2}$$

ونجد أن:

$$f\left(X_{k+1}/\underline{x}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_{k+1} + \frac{\sigma_{2\,d}}{G}}\; e^{-\frac{1}{\frac{{\sigma_2}^2d^2}{G^2}}(\ln x_{k+1}-\mathrm{C})^2}$$

يتضح من الدالة السابقة أن التوزيع الاحتمالي الحدي التنبؤي لقيم المطالبات يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي بمعالم $\left[\boldsymbol{C}\,,\frac{\boldsymbol{\sigma_1}^2\boldsymbol{d}^2}{\boldsymbol{G}^2}\right]$ حيث إن: **(إسماعيل، ٢٠١١، ص ٢٤)**

$$\mu_p = C = \frac{{\sigma_1}^2T_2 + {\sigma_2}^2T_1}{k_2\,{\sigma_1}^2 + k_1\,{\sigma_2}^2} = 10.62050191$$

$${\sigma_p}^2 = \frac{{\sigma_2}^2d^2}{G^2} = {\sigma_2}^2\,.\,\frac{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{k_2\,{\sigma_1}^2 + k_1\,{\sigma_2}^2}\left[\frac{1}{{\sigma_2}^2} + \frac{k_2\,{\sigma_1}^2 + k_1\,{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\right] = 0.920973994$$

حيث إن $\mu_p\,,\,{\sigma_p}^2$ هما التوقع والتباين للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي وبالتالي فانه يمكن تحديد التوقع والتباين للمتغير العشوائي (قيم المطالبات) كما يلي:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_{k+1}) = e^{\left(\mu_p+\frac{1}{2}{\sigma_p}^2\right)} = 64925.0563$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_{k+1}) = e^{2\mu_p+{\sigma_p}^2}\left(e^{{\sigma_p}^2}-1\right) = 6372363094$$

وبالتالي فإن توقع قيمة المطالبة العام القادم هي: 64925.0563 جنيها، والتباين 6372363094جنيها

٢-تقدير العزوم الأربعة للتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات حول الصفر والمتوسط

١/٢ حساب العزوم الأربعة للتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات حول الصفر

دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات هي دالة توزيع اللوغاريتمي الطبيعي بمعالم($\mu_p = 10.62050191\,, \quad \sigma_p{}^2 = 0.920973994$).
- أمكن تقدير العزوم الأربعة حول الصفر وفقاً لدالة توليد العزوم للتوزيع الاحتمالي التنبؤي وهو التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي باستخدام برنامج(Mathcad Prime 6) كما يلي:

(Johnson, Norman L., 1970, p.115)

$$\mu_1{}'(X) = E(X_{k+1}) = \boldsymbol{e}^{\left(\boldsymbol{\mu_p}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma_p}^{\mathbf{2}}\right)} = 64925.0563$$

$$\mu_2{}'(X) = e^{2\left(\boldsymbol{\mu_p}+\boldsymbol{\sigma_p}^{\mathbf{2}}\right)} = 10587626024$$

$$\mu_3{}'(X) = e^{3\boldsymbol{\mu_p}+9\frac{\boldsymbol{\sigma_p}^{\mathbf{2}}}{2}} = 4.33669 \times 10^{15}$$

$$\mu_4{}'(X) = e^{4\,\boldsymbol{\mu_p}+8\,\boldsymbol{\sigma_p}^{\mathbf{2}}} = 4.46162 \times 10^{21}$$

٢/٢ حساب العزوم الأربعة للتوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات حول المتوسط

باستخدام العلاقة بين العزوم حول المتوسط والعزوم حول أمكن تقدير العزوم الأربعة للتوزيع الإحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات حول المتوسط لتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي الصفر باستخدام برنامج (Mathcad Prime 6) كما يلي:

$$\mu_1(X) = zero$$

$$\mu_2(X) = V(X_{k+1}) = \mu_2{}'(X) - [\mu_1{}'(X)]^2 = 6372363094$$

$$\mu_3(X) = \mu_3{}'(X) - 3\mu_2{}'(X)\mu_1{}'(X) + 2[\mu_1{}'(X)]^3$$
$$= 2.82184 \times 10^{15}$$

$$\mu_4(X) = \mu_4{}'(X) - 4\mu_3{}'(X)\,\mu_1{}'(X) + 6\mu_2{}'(X)[\mu_1{}'(X)]^{\mathbf{2}} - 3[\mu_1{}'(X)]^{\mathbf{4}}$$
$$= 3.54986 \times 10^{21}$$

ثالثاً: تحديد التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لدالة قيم المطالبات

١- العزوم الأربعة الأولي للتوزيع الإجمالي التنبؤي $f\left(S_{k+1}/\underline{X}_2\right)$ لقيم المطالبات

أمكن تقدير العزوم الأربعة الأولي للتوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات من خلال دمج عزوم التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات و عزوم التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات وذلك طبقاً للعلاقات التالية و باستخدام برنامج (Mathcad Prime 6) نحصل علي النتائج التالية: **(Hong Shiang Lau, 1984, p.20:30)**

$$\mu_1(S) = \mu_1{}'(X) \times \mu_1(N)$$

$$= 64925.0563 \times 2065.93236 = 134130775$$

$$\mu_2(S) = \{[\mu_1{}'(X)]^2 \times \mu_2(N)\} + \{\mu_2(X) \times \mu_1(N)\}$$

$$= 2.45375 \times 10^{13}$$

$$\mu_3(S) = \{[\mu_1{}'(X)]^3 \times \mu_3(N)\} + \{\mu_3(X) \times \mu_1(N)\} + \{3\mu_1{}'(X) \times \mu_2(X) \times \mu_2(N)\}$$

$$= 1.03685 \times 10^{19}$$

$$\mu_3(S) = \{[\mu_1{}'(X)]^4 \times \mu_4(N)\} + \{\mu_4(X) \times \mu_1(N)\} + \{4\mu_1{}'(X) \times \mu_3(X) \times \mu_2(N)\} + 6[\mu_1{}'(X)]^2 \times \mu_2(X)\{\mu_1(N) \times \mu_2(N) + \mu_3(N)\} + 3[\mu_2(X)]^2 \times \{[\mu_1(N)]^2 - \mu_1(N) + \mu_2(N)\}$$

$$= 1.81652 \times 10^{27}$$

حيث إن S متغير عشوائي يعبر عن إجمالي قيم المطالبات.

٢- تحديد شكل التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لدالة قيم المطالبات وفقاً لقيمة معامل بيرسون

يتم استخدام العزوم الأربعة الأولي المركبة لحساب معامل الالتواء(β_1) ومعامل التفرطح(β_2) لاستخدامها في تحديد قيمة المعادلة التفاضلية لبيرسون، وذلك لتحديد التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لقيم المطالبات كما يلي:

(Lahcene, Bachioua, 2013, p.108:109)

- معامل الالتواء β_1

$$\beta_1 = \frac{[\mu_3(S)]^2}{[\mu_2(S)]^3} = 0.007276855$$

- معامل التفرطح β_2

$$\beta_2 = \frac{\mu_4(S)}{[\mu_2(S)]^2} = 3.017026802$$

- معامل بيرسون K

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} = 0.44731712$$

حسب مجموعة منحنيات بيرسون إذا كانت قيمة معامل بيرسون تقع بين الصفر والواحد الصحيح اي ($0< k <1$)، فإن منحني التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات يكون من النوع الرابع وفقاً لمنحنيات بيرسون وتكون الدالة الاحتمالية علي شكل دالة جاما ونقطة الأصل عند بدء المنحني.

(إسماعيل،٢٠٠٥، ص١٣١) (البرقاوي،٢٠١٩، ص.١٠٠)

أي أن المتغير العشوائي S يتبع توزيع جاما.

$$S \sim Gamma\ (\ \mu\ , \alpha\ )$$

وتأخذ دالة التوزيع التراكمية لتوزيع جاما الشكل التالي:

$$F(S) = \int_0^S \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu S} (\mu S)^{\alpha-1}\ \ ds$$

يتم الحصول على معلمات توزيع الدالة المركبة الذي وجد أنها توزيع جاما عن طريق مساواة العزم الأول لتوزيع جاما الجديد بعزم الدالة المركبة الأول $M_1(S)$ ومساواة العزم الثاني لتوزيع جاما الجديد بعزم الدالة المركبة الثاني $M_2(S)$:

(Lahcene, Bachioua, 2013, p.108:109)

$$\mathrm{E(S)} = \mu_1(S) = \frac{\alpha}{\mu} = 134130775 \qquad (1)$$

$$\mathrm{V(S)} = \mu_2(S) = \frac{\alpha}{\mu^2} = 2.45375 \times 10^{13} \qquad (2)$$

وبقسمة المعادلة الأولي على المعادلة الثانية يمكن تقدير معالم التوزيع الإجمالي التنبؤي لقيم المطالبات:

$$\mu = 5.46636 \times 10^{-6}$$

$$\alpha = 733.20757$$

النموذج الرياضي المقترح الذي يحكم حوادث آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري هو:

$$F(S) = \int_0^S \frac{5.46636 \times 10^{-6}}{\Gamma(733.20757)} e^{-(5.46636\times10^{-6})S} (5.46636 \times 10^{-6} \times S)^{732.20757}$$

رابعاً: حساب سعر التأمين الصافي والتجاري

بعد الحصول علي النموذج الرياضي المركب الذي يحكم حوادث آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري ، يمكننا الأن الوصول للقسط النهائي والذي يمثل القسط الصافي الخام مضافاً اليه مخصص الإنحرافات لقيم المطالبات (الفرق بين المطالبات الفعلية والمطالبات المتوقعة)، وتتوقف قيمة هذا المخصص علي قيمة الإحتمال المختار، فإذا قررت شركة التأمين تحديد القسط والذي تقع في حدوده 99 % من مجموع قيم المطالبات فإنه يمكن الحصول علي قيمة المطالبات الإجمالية كما يلي :

دالة الكثافة الإحتمالية لدالة إجمالي قيم المطالبات:

$$F(S) = \frac{5.46636 \times 10^{-6}}{\Gamma(733.20757)} e^{-(5.46636\times10^{-6})S} (5.46636 \times 10^{-6} \times S)^{732.20757}$$

للحصول علي قيمة $(s = aggregate\ claims)$ نستخدم دالة التوزيع المركبة التالية:

$$F(S) = \int_0^S \frac{5.46636 \times 10^{-6}}{\Gamma(733.20757)} e^{-(5.46636\times10^{-6})S} (5.46636 \times 10^{-6} \times S)^{732.20757}$$

باستخدام برنامج (R) للحزم الإحصائية عند إحتمال قدره 99 % فإن S = 145922813

إجمالي قيم المطالبات $(aggregate\ claims)$ = 145922813

∴ مخصص الإنحرافات في قيم المطالبات الفعلية عن المطالبات المتوقعة =

$145922813 - 134130775 = 11792038$ جنيها

- قسط التأمين الصافي = قسط الخطر + مخصص الانحرافات

١- قسط التأمين الصافي = $134130775 + 11792038 = 145922813$

- سعر التأمين الصافي = $\frac{\text{إجمالي قيم المطالبات}}{\text{إجمالي مبالغ التأمين}}$

٢ – سعر الصافي التأمين = $\frac{145922813}{224058391557} = 6.5127 \times 10^{-4}$

- السعر التجاري

$$= \frac{\text{السعر الصافي النهائي}}{\text{١ – (نسبة المصاريف العمومية والإدارية والعمولات + نسبة هامش الربح)}}$$

٣ – السعر التجاري = $\frac{6.5127 \times 10^{-4}}{(0.05 + 0.229) - 1} = 9.0329 \times 10^{-4}$

أولاً: النتائج:

يمكن عرض نتائج الدراسة كما يلي:

١- عدد مطالبات تأمين آلات ومعدات المقاولين تتبع توزيع ذو الحدين السالب ، أي أن:

$$\mathrm{N} - \mathrm{NB}(\mathrm{r}_2, \mathrm{p}\,);\ = r_2 = 0.50797195 \qquad p \ = \ 0.76838654$$

٢- دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات تكون علي الشكل التالي:

$$f\left(N_{k+1}/\underline{\mathrm{N}}_2\right) = \ \mathrm{C}_{N_{k+1}}^{N_{k+1}+1-1}(0.765739)^1(1-0.765739)^{N_{k+1}}$$

وهي دالة توزيع ثنائي الحدين السالب بمعالم (1, 0.7657392)

$$r = \ \ 1 \qquad\qquad p \ = \ 0.765739$$

٣- قيم مطالبات تأمين آلات ومعدات المقاولين تتبع توزيع اللوغاريتمي الطبيعي بمعلمات

$$\sigma_2{}^2 = 0.92040321 \ ، \ \ \mu = 10.61197356$$

٤- دالة التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي، وتكون دالة كثافته الاحتمالية علي الشكل التالي:

$$f\left(X_{k+1}/\underline{X_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ x_{k+1} + \frac{\sigma_{2\,d}}{G}}\ e^{-\frac{1}{\frac{\sigma_2{}^2 d^2}{G^2}}(\ln x_{k+1} - \mathrm{C})^2}$$

ومعالم التوزيع هي $\left[C\,, \boldsymbol{\frac{\sigma_2{}^2 d^2}{G^2}}\right]$

حيث إن:

$$\mu_p \ = C \ \ = \frac{\sigma_1{}^2 T_2 \ + \sigma_2{}^2 T_1}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2}$$

$$\sigma_p{}^2 = \frac{\sigma_2{}^2 d^2}{G^2} = \sigma_2{}^2\ .\ \frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2}\left[\frac{1}{\sigma_2{}^2} + \frac{k_2\,\sigma_1{}^2 + k_1\,\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}\right]$$

ومعالم التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي هي :

$$\mu_p = 10.62050191 \qquad , \qquad {\sigma_p}^2 = 0.920973994$$

٥- تم استخدام توزيعات بيرسون في تحديد دالة قيم المطالبات الإجمالية والتي تعتمد على العزوم المركزية المركبة والناتجة من دمج عزوم توزيع عدد المطالبات، وعزوم توزيع قيم المطالبات.

٦- دالة التوزيع الإجمالي التنبؤي لقيم مطالبات وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري تتبع توزيع جاما بمعلمات

$$\alpha = 733.20757 \quad ، \quad \mu = 5.46636 \times 10^{-6}$$

٧- دالة الكثافة الاحتمالية لدالة التوزيع الاحتمالي الإجمالي التنبؤي لقيم مطالبات وثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين كانت على الشكل التالي:

$$F(S) = \frac{5.46636 \times 10^{-6}}{\Gamma(733.20757)} e^{-(5.46636\times10^{-6})S} (5.46636 \times 10^{-6} \times S)^{732.20757}$$

٨- دالة الاحتمالات التراكمية كانت على الشكل التالي:

$$F(S) = \int_0^S \frac{5.46636 \times 10^{-6}}{\Gamma(733.20757)} e^{-(5.46636\times10^{-6})S} (5.46636 \times 10^{-6} \times S)^{732.20757}$$

٩- سعر التأمين الصافي لتغطية وثيقة آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري هو 6.5127×10^{-4}، بينما سعر التأمين التجاري هو 9.0329×10^{-4} ، في حين أن السعر المطبق حالياً في السوق حوالي 0.001 .

١٠- بمقارنة السعر المطبق حالياً بالسعر الذي تم توصل اليه ، يتضح أن السعر المطبق حالياً أكبر من السعر العادل ،أي أن هناك مبالغة في السعر الحالي لوثيقة تأمين آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري.

ثانياً: التوصيات:

١- ضرورة استخدام أسلوب التحليل البيزي والتوزيعات الاحتمالية المركبة في تسعير الأخطار التجميعية أو المركبة.

٢- ضرورة استخدام توزيع ذو الحدين السالب بدلاً من توزيع بواسون في حالة تبين أن بيانات عدد الحوادث تتبع توزيع بواسون وتوزيع ذو الحدين السالب.

٣- يوصي الباحث باستخدام الدالة المولدة للعزوم لتوزيع مركب من: دالة احتمال لتوزيع متقطع (يصف عدد الحوادث)، مع دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مستمر (يصف حجم الخسائر)

٤- يوصي البحث باستخدام منحنيات بيرسون كوسيلة إحصائية مهمة، لتحديد التوزيع الاحتمالي المركب المناسب للوصول لدالة التوزيع الإجمالي الحدي لقيم مطالبات.

٥- أهمية استخدام نظرية الأخطار التجميعية أو المركبة في تسعير وثيقة آلات ومعدات المقاولين في سوق التأمين المصري

مراجع البحث:

١) إســماعيل، عماد عبد الجليل علي، " اســتخدام التحليل البيزي لتقدير الحد الأقصــى لإجمالي الخســائر الســنوية المحتملة"، **مجلة الدراســات المالية والتجارية**، كلية التجارة، جامعة بني سويف، ٢٠١١.

٢) إسماعيل، عماد عبد الجليل علي، " **تسعير وثيقة التأمين الشاملة للفنادق والقري السياحية**"، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التجارة، جامعة القاهرة، ٢٠٠٥.

٣) البرقاوي، محمد أحمد فؤاد عبده، " **نموذج مقترح لنمذجة الأخطار كأسلوب لتسعير الأخطار المركبة بالتطبيق على الهيئة القومية لسكك حديد مصر**"، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التجارة، جامعة المنصورة، ٢٠١٩.

٤) الدعيس، فؤاد سعيد سعيد، " **دراسة مقارنة لطرائق تقدير معالم التوزيعات الاحتمالية للفشل ودورها في الموثوقية حالة تطبيقية في القطاع الصناعي اليمني** "، رسالة دكتوراة غير منشورة، كلية الاقتصاد، جامعة دمشق، ٢٠٠٩.

٥) المعداوي، جيهان مسعد، " استخدام نموذج المصداقية في تسعير التأمين الهندسي"، **مجلة الدراسات التجارية المعاصرة**، جامعة كفر الشيخ، العدد الرابع، ٢٠١٨.

٦) جلول، محمد عطية، " تقدير معدلات الخســـارة في تأمين الممتلكات والمســـئولية باستخدام أسلوب التحليل البيزي التجريبي بالتطبيق على السوق المصرية "، **المجلة العربية للإدارة**، جامعة جنوب الوادي، العدد الأول، ٢٠١٣.

٧) حافظ، محمد محمد السيد، " **ترشيد سياسات الاكتتاب والتسعير في التأمين البحري بضائع باستخدام الأساليب الكمية**"، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التجارة، جامعة بني سويف، ٢٠١٥.

٨) ١٥- ســليمان، أســامة ربيع أمين، " **تســعير تأمينات الممتلكات والمســئوليات باســتخدام النماذج المالية في الفكر الإكتواري الحديث**"، رســالة دكتوراه غير منشورة، كلية التجارة، جامعة المنوفية، ٢٠٠٩.

٩) حســان، محمد فؤاد محمد، " الأخطار الهندسية ونموذج كمي مقترح لتسعير جميع الأخطار "، **مجلة آفاق جديدة للدراســات التجارية**، جامعة المنوفية، العدد الأول والثاني، ٢٠٠٢.

١٠) عبد الله، جابر سلام سالم، " **تقييم سياسات الاكتتاب في التأمين الهندسي دراسة تحليلية بالتطبيق على سوق التأمين المصري** "، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التجارة، جامعة بني سويف، ٢٠١٥.

١١) غالي، أكرم مراد نمر، " **دراســة تحليلية لمفهوم تحليل الخطر مع التطبيق على وثيقة تأمين جميع أخطار التركيب** "، رســالة ماجســتير، كلية التجارة، جامعة القاهرة، ٢٠٠٨.

١٢) ____________، "**تســعير التأمين الهندســي للآلات والمعدات وفقاً للعوامل المؤثرة في درجة الخطر** "، رســالة دكتوراه غير منشــورة، كلية التجارة، جامعة القاهرة، ٢٠١٧.

١٣) فياض، محي الدين عبد المنعم محمد، " تســـعير تأمين أخطار التركيب لمحطات توليد القوي الكهربائية في مرحلة الإنشــاء – دراســة كمية مقارنة "، **المجلة العلمية للبحوث التجارية**، كلية التجارة، جامعة المنوفية، العدد الثالث، ٢٠١٩.

١٤) معيط، محمد أحمد محمد، **" تســـعير تأمين جميع أخطار المقاولين في جمهورية مصر العربية**، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التجارة، جامعة القاهرة، ١٩٩٢.

15) Aiuppa, Thomas A., (1988) " Evaluation of Pearson curves A an Approximation of the Maximum probable Annual Aggregate Loss", **The Journal of Risk an insurance.**

16) Ali, Sherif Farouk Niazi, (2010) **"On Bayesian Prediction Under the Gompertz Model"**, Faculty of Science, University of Assiut. Master of Science.

17) Alba, Enrique. Juarez, Miguel., (2002) “Bayesian Estimation of Outstanding Claim Reserves**”, North American Actuarial Journal, VL - 6.**

18) Che, X., & S. Xu (2010). "Bayesian data analysis for agricultural experiments." **Canadian journal of plant science.**

19) David C. M. Dickson, Tedesco, L. M., & Zehnwirth, B., (1998), "Predictive Aggregate Claims Distributions. " ,**The Journal of Risk and Insurance, 65(4), .**

20) Hon Shiang Lau, (1984) "An Effective Approach for Estimating the Aggregate Loss of An Insurance Portfolio ", **The Journal of Risk and Insurance.**

21) Jewell, W. (1974). Credible Means are exact Bayesian for Exponential Families. ASTIN Bulletin, 8(1),

22) Johnson, Norman L., (1970), "**Continuous Univariate Distribution**", A Wiley Publication, USA.

23) Koch, Karl-Rudolf (2007)., **" Introduction to Bayesian Statisyics**"

Second edition., Springer Berlin Heidelberg New York.

24) Lahcene, Bachioua, (2013) "On Pearson families of distributions and its applications", **African Journal of Mathematics**.

25) Makov, U. E., Smith, A. F. M., & Y.-H. Liu. (1996). " Bayesian Methods in Actuarial Science. " **Journal of the Royal Statistical Society.**

26) Makov, Udi E., (2001). “Principal Applications of Bayesian Methods in Actuarial Science: A Perspective”, **North American Actuarial Journal.**

27) Morgan, Ibrahim Mhamed, (1983) **"Credibility Theory Under The Collective Risk Model"**, PhD dissertation, University of Wisconson, U.S.A.

28) Pacáková, V., (2013) " Credibility models for permanently updated estimates in insurance",**Journal of Mathematical Models and Methodes in Applied Science**.

29) Pacáková,V., (2012)**"Bayesian Estimations in Insurance Theory and Practice"** Proceeding of the 14th WSEAS International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering (MACMESE'12),

30) Packava, V.& Brebera, D., (2015), "Loss Distribution and simulations in General and Reinsurance", **International Journal of Mathematics and Computers, Vol.9.**

31) Rohatgi, V.& Saleh, A., (2015**)**, "**An Introduction to Probability and Statistics**" Third edition, John Wiley& Sons, Inc, United States of America.

32) Sigurgeirsdóttir, Erna, (2010**) "Analysis of claim frequency and claim size using the Bayesian approach"**, Master dissertation, Faculty of Industrial Engineering and Computer Science, University of Iceland.

33) Stokes, M. (2014), “**An Introduction to Bayesian Analysis with SAS/STAT Software**,” in Proceedings of the SAS Global Forum Conference, Cary, NC: SAS Institute Inc.

34) Weinstein, EW, (2005**)**, "**Pareto Distribution-from Wolfram Math World**", math world.worfram.com.

35) Zhang, C.-H. (2003)., "Compound Decision Theory and Empirical Bayes Methods. ", **The Annals of Statistics,** 31(2).